科研費特定領域研究「情報統計力学の深化と展開」平成 18 年度チュートリアル講演会

スケーリング理論とは何か?
–有限系から無限系を見る方法–

福島孝治 [1]
東京大学大学院総合文化研究科 広域科学専攻 相関基礎科学系

物理のいろいろな分野にスケーリング理論と呼ばれる理論が沢山あり，それぞれの分野で重要な寄与を与えている．今の世界から長さを 2 倍大きくすると，物事はどのようにみえるか? この素朴な問いに答えることが,「スケーリング理論」に共通する基本的な考え方である．ここではスケーリング理論を概観しながら，その特徴を解説してみたい．さらに，スケーリング理論の考え方を用いて，有限のスケールで得られた情報から無限大の世界の性質を抽出する方法を紹介する．

1 尺度を変えて見えること

スケーリングとは，ある物体のスケール (尺度) を大きくしたり，小さくしたりすることを指している．例えば，半径 r の円の面積を S とすると，半径と面積の間には,

$$S = (\text{定数}) \times r^n \tag{1}$$

の関係がある．もちろん，この「定数」は π であり，指数 n は 2 である．この式から，半径を 2 倍にすると，面積は 4 倍になることがわかる．それでは，長さ L のひもを考えてみる．そのひもは導線だったとすると，ひもの長さを 2 倍にしたときに電気伝導度は何倍になるだろうか．そのひもがくしゃくしゃに丸まっている DNA だったとする．ひもの長さを 2 倍にしたときに，丸まっている半径は何倍になるだろうか．これらの問題では，対応する式 (1) の左辺が観測量になっていて，両辺が「物理の法則」で関連付けられている．このように, ある変数のスケールを変化させたときの，興味ある量の変換関係式 (スケーリング則) を明らかにするのが**スケーリング理論**であり，相転移の臨界現象にはじまり，電気伝導 [1] や高分子 [4] 等，様々な分野で重要な貢献をしている[2]．物理の分野でこのスケーリング則が重要に思えるのは，同じ現象を考えるときに指数 n が多くの状況で普遍的な値をとり，(定数) 部分が個別の状況を反映しているという事実があるからだと考えられている．個別の状況には依存しない普遍的な指数を理解するには，普遍的な深い理由がそこにあると思え，それを解明する上でスケーリング理論が多いに役立っているというわけである[3]．

まず，もっとも簡単な力学で出てくるスケーリング理論から始めることにする．古典力学は，ニュートンの運動方程式と力あるいはポテンシャルから物体の運動を記述する理論である．質量 m の N 個の粒子の位置ベクトルを $\mathbf{r}_i (i = 1, \cdots, N)$ として，ポテンシャルを $U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \cdots, \mathbf{r}_N)$ とすると，i 番目の粒子の運動方程式は,

$$m\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{r}_i = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_i}U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \cdots, \mathbf{r}_N) \tag{2}$$

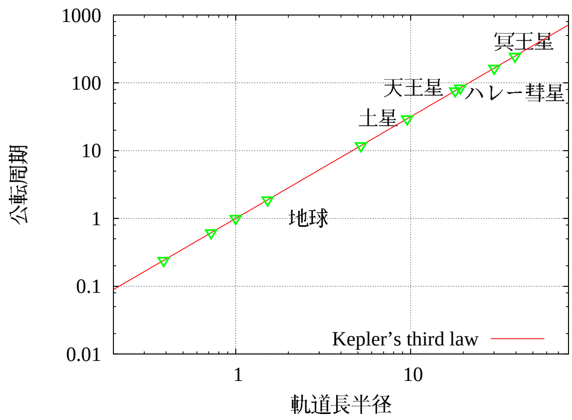
である．ここでポテンシャル U は k 次の同次関数の性質，すなわち,

$$U(a\mathbf{r}_1, a\mathbf{r}_2, \cdots, a\mathbf{r}_N) = a^k U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \cdots, \mathbf{r}_N) \tag{3}$$

---

[1] E-mail: hukusima@phys.c.u-tokyo.ac.jp
[2] 少し大げさに言えば，どの分野にも「Scaling theory of XXX」という論文があるくらいだ．
[3] 指数が普遍でないスケーリング則を表す現象も見つかっている．そのときは指数には当然普遍的な理由を求めることはできず，個別論が重要になってくる．

図 1: 太陽系の惑星の公転周期と軌道半径のプロット．地球の軌道半径と公転周期を基準とした．惑星のデータは理科年表から引用した．直線は傾き 3/2 であり，ケプラーの第 3 法則を示している．この図にはハレー彗星と最近惑星からもれた「冥王星」も含まれている．太陽の回りを回っている物体はこの直線上のどこかにのるはずである．



をもっているとする．この力学の問題で長さと時間の 2 つのスケールがあるので，それぞれのスケールを変えてみる．全ての位置ベクトルを α 倍し，時間を β 倍する：

$$\mathbf{r}_i \to \mathbf{r}'_i = \alpha \mathbf{r}_i, \quad t \to t' = \beta t. \tag{4}$$

これらをスケール変換と呼ぶ．このスケール変換した世界での運動方程式は，式 (2) を用いて，

$$\frac{\beta^2}{\alpha} m \frac{d^2}{dt'^2} \mathbf{r}'_i = -\frac{1}{\alpha^{k-1}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}'_i} U(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2, \cdots, \mathbf{r}'_N) \tag{5}$$

となることがわかる．これがスケール変換する前と同じであると要請すると，その条件から

$$\beta^2 = \alpha^{2-k} \Longrightarrow \beta = \alpha^{1-\frac{k}{2}} \tag{6}$$

であることがわかる．スケール変換に対して物理法則が不変である (スケール変換不変性) とすると，スケール変換則に上のような制限がつくわけである．

例えば，万有引力は $k = -1$ である．このとき，$\beta = \alpha^{3/2}$，つまり，

$$\frac{t'}{t} = \left(\frac{r'}{r}\right)^{3/2}$$

である．地球の公転半径を α 倍したときに，時間スケールである周期が $\alpha^{3/2}$ になることが示された．これは観測事実から見出されたケプラーの第三法則である．運動方程式を直接解くことなく，スケーリング則だけからわかることである．

2 統計力学での熱力学 (大システム) 極限への接近

樺島氏や渡邊氏のの講演のように,「量が質を変える」ことは物理の分野ではたびたび発見されている．その一つの典型は相転移現象である．相転移は自由エネルギーの特異性で特徴づけられる．カノニカル分布を考える限り，ボルツマン因子 $\exp(-\beta E)$ は有限温度で解析的であり，その和 (積分) で表される分配関数 Z，あるいは分配関数の対数である自由エネルギー $F = -k_{\rm B} \log Z$ は有限系である限りやはり解析的である．だから自由エネルギーの特異性は，熱力学極限である無限の数の構成粒子のときに初めて実現される非常に特別な現象であると思える．まさに，アボガドロ数 ($\sim 10^{23}$) ほどある巨大な数が質の異なる現象の源になっているわけである．

しかし，このことは有限の世界にいる限り，相転移は決してみることはできないことを意味している．例えば，厳密に取り扱うことの難しい多体系の統計力学の問題を計算機実験で調べるとき，必然的に**有限の系**しか扱うことができない．無限に大きいメモリーを持ったコンピューターはこの世には存在しないわけで

ある．何とか有限系の情報から，熱力学極限で起きていることはわからないだろうか? また，逆に熱力学極限からの接近法として有限系を捉えるならば，有限系がどのように無限系と接続しているかは重要な問題になる．

一見すると，これは有限の系の計算機実験で得られた数値データの外挿方法のような退屈な数値解析の話しに思えるかも知れない．しかし，ここでは前章で議論した**スケーリング**の考え方を用いた無限系の捕まえ方と捉えてみたい．系の大きさを二倍にしたときの性質がよく分れば，それを繰り返すことで無限系の様子を知ることができる... だろうと思うわけである．

2.1 問題設定 –測れる量と測れない量–

ここでは有限系の磁性体の問題を考えることにする．有限系の体積を V として，磁石の強さを表す磁化密度 M は，局所的なスピン σ_i の平均として

$$M = \frac{1}{V} \sum_i \sigma_i \tag{7}$$

で表される．この確率分布関数 $P(M)$ の性質を議論したい．ここで考える磁性体のモデルは磁化の反転対称性をもっているとする．このとき，確率分布関数も同じ対称性 $(P(M) = P(-M))$ を持つことになる．この分布関数を用いて，磁化密度の任意のモーメントは，

$$\langle M^k \rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} M^k P(M) = \frac{1}{V^k} \sum_{i_1} \sum_{i_2} \cdots \sum_{i_k} \langle \sigma_{i_1} \sigma_{i_2} \cdots \sigma_{i_k} \rangle \tag{8}$$

と表せる．この問題での相転移現象は，例えば $\langle M \rangle$ の温度依存性にみることができる．高温で $\langle M \rangle = 0$ であり，ある温度 (転移温度 T_c) より低温でのみ $\langle M \rangle > 0$ となる．対称性からの帰結は，奇数の k に対しては恒等的に式 (8) はゼロである．もしも有限系で 0 でない磁化密度の期待値を求めてしまったとしたら，何からの意味で間違いである[4]．この対称性が破れて $\langle M \rangle \neq 0$ となるのは熱力学極限である無限系のみである．そこで，通常は磁化密度の感受率である帯磁率 χ を調べることが多い．感受率は磁化に共役な磁場の変化に対する応答関数であるが，ゆらぎ応答定理によって，一般に磁化密度のゆらぎで次のように表すことができる：

$$\chi = V \left(\langle M^2 \rangle - \langle M \rangle^2 \right). \tag{9}$$

二次の相転移が起きるときに，この帯磁率は転移温度 T_c で，

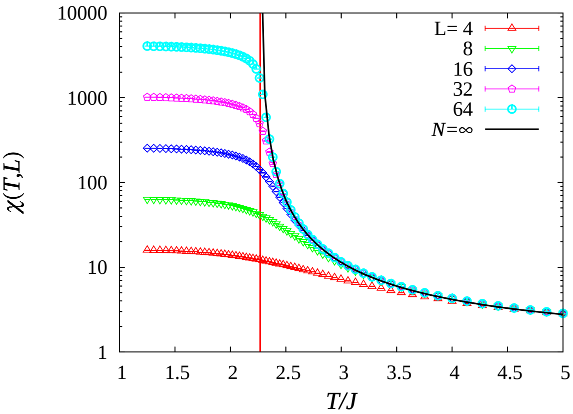
$$\chi(T) = A_\chi \left| \frac{T - T_c}{T_c} \right|^{-\gamma} \tag{10}$$

のように発散を示す．γ は帯磁率の発散を表す臨界指数であり，係数 A_χ は臨界振幅と呼ばれる定数である．この関係式は，温度を転移温度からのズレを 2 倍にしたときの帯磁率の変換則を表している**スケーリング則**である．帯磁率は転移温度から離れていると，V に依存しない定数になる．高温度で磁化密度がゼロである無秩序相では正しく帯磁率を求めることができるが，上の議論の結果から有限系では式 (9) の第二項がゼロであることから，低温で磁化密度がゼロでなくなる秩序相では正しく求めることができない．そのために，$\tilde{\chi}/V = \langle M^2 \rangle$ が V に依らない定数として評価できる．Fig. 2 に相転移を示す 2 次元正方格子上のイジング模型の例を示した．確かに，高温と低温のデータからそれぞれその性質が見て取れる．つまり，両方では熱力学極限の振舞いが有限系からわかったことになる．その中間のちょうど相転移温度近傍で熱力学極限の値，あるいはその振舞いがこの図からわかるかが問題である．

問題点をここでまとめておくと以下のとおりである．

1. 与えられた有限系のデータから，相転移温度やその特徴である臨界指数を評価する．

[4] 信念伝搬法などで有限系でゼロでない磁化密度が求まることはある．このときは反復方程式の初期条件が対称性を破っているので，心配しなくてもよい．



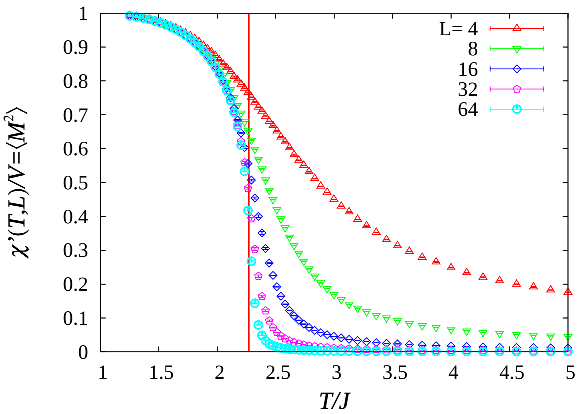


図 2: 2 次元正方格子上のイジング模型の帯磁率そのもの (左) と帯磁率を体積で割った量 (二乗磁化)(右) の温度依存性：それぞれの線は異なるサイズ $V = L^2$ に対応している．高温では帯磁率が，低温では二乗磁化がサイズに依らずに一定の値になっていることが見て取れる．この模型の相転移温度は $T_c = 2.26918533229\cdots$ であり，臨界指数 γ は 7/4 であることがわかっている．これらのデータはモンテカルロ法によって得られた．左図の曲線は無限系の理論曲線である．

2. 与えられた有限系のデータから，無限系の値を推定する．

1．では無限系の値を求めることを直接せずに，知りたい情報である転移温度等だけを知ることを想定している．一見奇妙に思えるが，これが可能であることは以下に示される．一方で，無限系の値に興味がある場合は，2．が目標となる．無限系の値が得られると，そこから 1．は可能であるので，2．は 1．を含んでいると思える．素朴には，温度をある値に固定して，サイズ依存性を外挿すればよいように思うかも知れない．先に述べたように十分高温や十分低温はそれが可能である．そこでは外挿公式が簡単に予想できるからである．しかしながら，転移温度近傍では，その両方の外挿公式が成り立たないことがわかっている．しかも，一般には転移温度がどこにあるかは事前にはわからないのである．つまり，与えられた温度でどの外挿公式を使うのがよいのかが自明でないわけである．

3　有限サイズスケーリング理論 [2, 3]

ここでは先の問いに答える手法として有限サイズスケーリング理論を紹介する．例えば，帯磁率のような示強的な量が熱力学極限でかつ相転移温度近傍で特異的な振る舞い

$$\langle A\rangle(\infty, T) \propto \left|\frac{T_c - T}{T_c}\right|^{-x_A} \quad \text{at } T \sim T_c \tag{11}$$

を示すとする．ここで x_A は臨界指数であり，T_c は転移温度である．以下では $t \equiv |(T_c - T)/T|$ として，スケール変数と呼ぶ．これは温度が転移温度からどの程度ずれているかを表す無次元量である[5]．L を系を特徴付ける長さのスケールとする．例えば，d 次元空間のサイズ V に対して，$L = V^{1/d}$ とする．我々は大きさ V，すなわち長さ L の有限系の物理量の情報を持っている．

有限サイズスケーリングの基本的な仮定は，「サイズ L の有限系の振る舞いはある比 L/ξ_∞ で特徴づけられる」とすることである．この ξ_∞ は無限系での**相関長**であり，大雑把に言えばスピンが揃っている空間的な広がりを特徴づけているスケールである．相転移はそのスケールが発散することに対応しているので，転

[5] 一般には転移温度近傍でずれを表していれば良いので，逆温度の差 $\tau \equiv |(\beta - \beta_c)/\beta_c|$ でもよい．どちらでも転移温度近傍ではずれの一次関数になっている．伝統的には上の t 変数が使われて来たが，τ 変数とどちらがよいかはあまり議論されてこなかった．最近我々は τ を基本とする方がよさそうだとする議論と幾つかの情況証拠を示した [6]．ここではこれ以上深入りせずに伝統的な記法に従うことにする．

移温度近傍で

$$\xi_\infty \propto \left|\frac{T_c - T}{T_c}\right|^{-\nu} \tag{12}$$

となる．ここで ν は相関長に対する臨界指数である．これは，長さと温度を結びつけているスケーリング則である．L/ξ_∞ が十分に大きいときには，有限系のスケール L がスピンの揃っているスケール ξ_∞ よりも十分に大きいので，もう L は熱力学極限と思ってもよいわけである．一方で，L/ξ_∞ が小さいときには，有限系のスケール L が本来揃っているはずの相関のスケール ξ_∞ に足りず，熱力学極限とはとても思えない．しかし，その時の量が比 L/ξ_∞ だけで決まっているというのが強い仮定である．

この仮定は有限系の量 $\langle A\rangle(L,T)$ が次のように表せることを意味している：

有限サイズスケーリング仮説：
$$\langle A\rangle(L,T) = L^{x_A/\nu} f_A\left(\frac{L}{\xi_\infty}\right). \tag{13}$$

ここで f_A は解析関数で，温度に依存しない普遍的な関数である．つまり，左辺は温度 T とサイズ L の二変数関数であるが，右辺では ξ_∞ を介してのみ温度に依存している．もともと温度の関数として発散するはずの量を解析関数で表しているところがうまいところである．また，L を大きくしたときに現れるはずの特異性 (11) は解析関数 f_A の性質

$$f_A(y) \sim y^{-x_A/\nu} \text{ for large } y \tag{14}$$

にある．

この仮定は，前章での同次関数性 (3) を物理量 A に課していることになる[6]．力学の問題はポテンシャルの性質として，同次性は示すことができたが，今の問題では陽に示すことはできず，基本的な仮説として導入される．仮説であるので，実際の解析の中で検証される必要がある．

有限サイズスケーリング則はこのスケーリング仮説から展開されるが，式 (13) は実用的ではない．右辺に無限系の性質 ξ_∞ があるからである．これを有限系の性質で置き換えるために，式 (13) の A を相関長 ξ として，有限系の相関長 ξ_L に対する有限サイズスケーリング関係式を書いてみる：

$$\xi_L(T) = L f_\xi\left(\frac{L}{\xi_\infty}\right). \tag{16}$$

関数 f_ξ に逆関数が存在するとすれば，ξ_∞/L は ξ_L/L で置き換えてよいことがわかる．これらのことから，実際に使われる有限サイズスケーリングの幾つかの表現 (流儀) が得られる．

$$\begin{aligned}
\langle A\rangle(L,T) &= L^{x_A/\nu}\tilde{f}_A(L^{1/\nu}t), && (17)\\
\frac{\langle A\rangle(L,T)}{\langle A\rangle(\infty,T)} &= \tilde{f}'_A(L/\xi_L), && (18)\\
\frac{\langle A\rangle(L,T)}{\langle A\rangle(2L,T)} &= \tilde{f}''_A(L/\xi_L), && (19)
\end{aligned}$$

ここで $\tilde{f}_A, \tilde{f}'_A, \tilde{f}''_A$ はそれぞれ異なる普遍的なスケーリング関数である．これらは，同じ有限サイズスケーリングの仮説から出てきているので，同じと言えば同じだが，少し違うようにも見える側面もある．以下では先の帯磁率の具体的な例を見て行くことにする．

[6] 一般化同次関数の性質を用いて，

$$\begin{aligned}
\langle A\rangle(L,T) &= \alpha^{-y_A}\langle A\rangle(\alpha L, \alpha^{y_T}t) = \xi_\infty^{y_A}\langle A\rangle(L/\xi_\infty, t/\xi_\infty^{y_T})\\
&= L^{y_A}\left(\frac{\xi_\infty}{L}\right)^{y_A}\langle A\rangle\left(\frac{L}{\xi_\infty}, \frac{t}{\xi_\infty^{y_T}}\right) && (15)
\end{aligned}$$

となる．ここで自由に選べるスケール因子 α を $1/\xi_\infty$ に，$y_T = 1/\nu$ ととり，第二引数を定数になるようにスケール変換をしたとすると，式 (13) が得られる．

3.1 最も使用頻度が高い有限サイズスケーリング

最もよく使われているのは，式 (17) を実行する有限サイズスケーリングである．このスケーリング関係式は，

$$\frac{\chi(T,L)}{L^{\gamma/\nu}} = f_\chi(L^{1/\nu}t) \tag{20}$$

と書けるので，未知の変数 T_c, ν, γ を調整すれば，左辺 $\chi/L^{\gamma/\nu}$ は $L^{1/\nu}t$ だけの関数で表されるはずである．例の二次元イジング模型の臨界温度や臨界指数は全て知っているので，それを用いてこのスケーリングプロットをしたのが Fig. 3 である．確かにサイズが大きく成るほどに，データが一つの普遍的スケーリング関数にのっていることが見てとれる．さらに，その普遍関数の期待される漸近形も確認することができる．今の例題では，スケーリング則の変数 T_c, γ, ν が既知の場合を考えているが，通常はそれらが未知であり，図のような普遍関数を与えるようにそれらの変数を決めることになる．

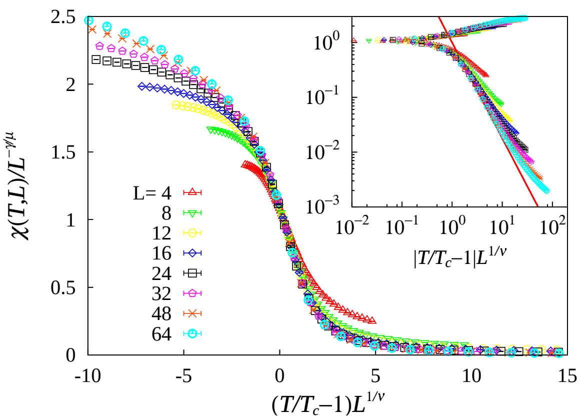


図 3: 2 次元イジング模型の帯磁率の有限サイズスケーリング：Fig. 2 の全てのデータを用いて，$T_c = 2.2691...$, $\gamma = 7/4$, $\nu = 1$ とした．挿入図は横軸を $|T/Tc - 1|L^{1/\nu}$ として，両対数プロットした．直線は普遍関数に対する期待される漸近線 $x^{-7/4}$ である．

この図を見て，まず Fig. 2 の二変数関数が 1 つのスケール変数 $L^{1/\nu}t$ で表せそうなことはわかる．しかし，詳細に見ると例えば小さいサイズは明らかにずれているし，スケール変数の負の領域 ($T < T_c$) では明らかにずれている．こうした**ずれ**に対する理由 (言い訳) を考えることは一般には難しいことである．ただ，後者の理由は明らかで，前章で議論したように，ここで測っている量は正確には帯磁率ではないことによると考えられる．前者は深刻な問題で，多くの教科書にはスケーリング補正項がその理由だと説明されている．つまり，帯磁率が式 (10) のような特異的な振る舞いを示すのは転移温度の近傍だけであり，そこから外れるとその限りではないというわけである．具体的にスケーリング関係式 (20) に対する補正項は，

$$\chi(T,L) = L^{\gamma/\nu}\left(f_\chi(L^{1/\nu}t) + L^{\omega} f_1(L^{1/\nu}t) + \cdots\right) \tag{21}$$

となると考えられている．補正項まで含めた解析も不可能ではないが，一般に難しく，そもそも「転移温度の近傍」がどこなのかが事前にわからないことが問題を難しくしている．こうした問題を軽減するために，事前にわかっている自明な補正項はできるだけ見えないようにする試みがある [6]．

もし，転移温度に興味があるのであれば，式 (17) の x_A がゼロになるような物理量を選ぶのが賢い．その代表的な物理量は Binder parameter

$$g = \frac{1}{2}\left(3 - \frac{\langle M^4\rangle}{\langle M^2\rangle^2}\right) \tag{22}$$

である [9]．$x_A = 0$ であるとき，スケーリング関係式は，

$$g(T,L) = f_g(L^{1/\nu}t) \tag{23}$$

となるので，$t = 0$ すなわち $T = T_c$ の時は右辺はサイズ L に依存せずに定数になる．つまり，温度の関数としてプロットしたときに，サイズに依存しないところが転移温度になる．Fig. 4 にその例をを示す．転移

温度が直接わかることやスケーリングをするために調整する変数が T_c と ν の二つになっていることは便利である．ここで大事なことは $x_A = 0$ になるように物理量の次元を無くすことであったが，そのような量はこの Binder parameter に限らず，都合の良い量を考えることが出来る．

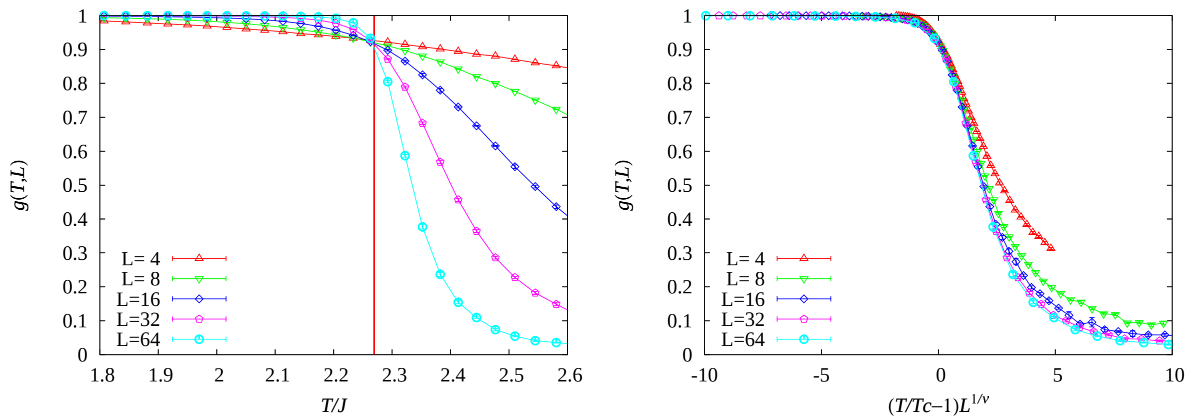


図 4: 2 次元イジング模型の Binder parameter の温度依存性 (左) とその有限サイズスケーリングプロット (右)．左図で異なるサイズのデータが交わる点が転移温度に対応している．

3.2　外挿を意識した有限サイズスケーリング

前節の方法では，転移温度や臨界指数を評価することに重点が置かれているように思うが，もう少し熱力学極限への外挿を重視して考える．ここでは，式 (18) を積極的に使う Kim の方法 [8] を紹介する．この方法では，

$$\frac{\chi(L,T)}{\chi(\infty,T)} = f_\chi\left(\frac{L}{\xi_L}\right) \tag{24}$$

がその基礎となる関係式である．まず，この関係式の中に転移温度 T_c は陽に含まれていない．その代わりに右辺には有限系の相関長 ξ_L があるが，これは

$$\xi_L(L,T) = \frac{1}{2\sin\left(\frac{\pi}{L}\right)}\sqrt{\frac{G(\mathbf{0})}{G(\mathbf{k}_{\rm min})} - 1} \tag{25}$$

として評価することが出来る [10]．ここで $G(\mathbf{k})$ は相関関数 $g(r) = \langle\sigma_i\sigma_{i+r}\rangle$ のフーリエ変換で，$\mathbf{k}_{\rm min} \equiv (2\pi/L, 0, \cdots)$ は最小の波数ベクトルを表している．この解析でのインプットは $\chi(L,T)$ と $\xi(L,T)$ であり，アウトプットは $\chi(\infty,T)$ である．有限系のデータから無限系を外挿しようとしているわけであるが，特徴はある温度 T のデータだけを使うのではなく，全ての温度を使ってスケーリング関数 f_χ から総合的に外挿を行うことである．もっとも，関数 f_χ の形は事前にはわからないので，わかるところから構成していく必要がある．最終的なスケーリングの様子を Fig. 5 に示した．この図を見ながら，具体的な手順を説明する．Fig. 2 に示すように，十分高温では熱力学極限での帯磁率の値は容易に推定できる．その値で規格化した帯磁率を $\xi_L(T)/L$ の関数としてプロットしてみる．そこから，スケーリング関数 $f_\chi(x)$ の $x=0$ 近傍の様子がわかる．今度は少し低温 T' でのサイズ依存性をこの $f_\chi(x)$ に継るように $\chi(\infty,T')$ を推定し，このプロットに追加する．この操作を続けると，スケーリング関数を $x=0$ から順に大きな方向へ伸ばしながら，外挿値を評価できることが分る．スケーリング関数の勾配が大きいときには，外挿値に不定性が残りやすい．Fig. 5 の $x=1$ 辺りにしかデータが存在しない低温でその問題が顕著になるので，注意が必要である．

この有限サイズスケーリングでも，スケーリング関数 f_χ は解析的な関数であることに注意したい．有限系の帯磁率が解析的であることを反映しているわけだが，一方で熱力学極限で現れる特異性とはどのように継っているのだろうか．この最後のスケーリングプロットを見ながら，サイズを大きくしたときにどうな

るかを考えてみる．相転移温度以外では相関長 ξ は有限であるから，温度を一定にしてサイズをどんどん大きくすると，スケーリング関数を右から左に移動していき，横軸は最終的には原点に向かうことになる．転移温度に付近になると，段々と原点に近付けなくなり，転移温度では決して原点に到達することはない．スケーリング仮説ではそこをうまく連続関数で繋いでいるわけである．

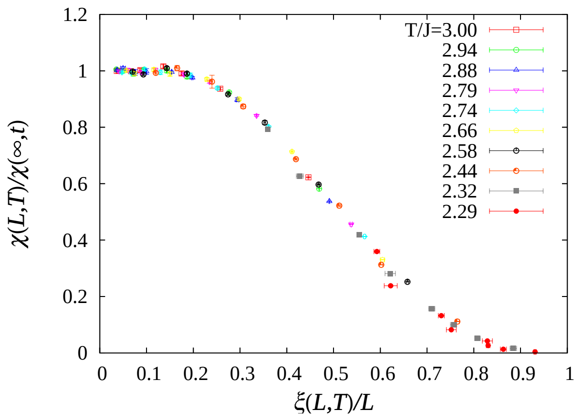


図 5: 2 次元イジング模型の帯磁率の有限サイズスケーリング 2：元のデータは Fig. 2 である．横軸は $\xi_L(T)/L$ であり，与えられた温度 T とサイズ L に対して既知の情報である．未知の量は各温度での縦軸の規格化定数であり，それが知りたい熱力学極限の帯磁率である．

3.3 徐々に大きくする有限サイズスケーリング

前節の方法では一足飛びに無限系の結果を外挿したのだが，徐々に大きくする方法も考えることが出来る．先のスケーリング関係式と 2 倍にした式の比をとることで，

$$\frac{\chi(L,T)}{\chi(2L,T)} = f'_\chi\left(\frac{L}{\xi_L}\right) \tag{26}$$

が得られる [7]．ここで f'_χ は別の普遍的な関数である．もはやこの式から未知の変数はなく，サイズを二倍にしたときの帯磁率の増え方が普遍的なスケーリング関数で表わされている．これはまさにスケーリング則とみなすことができる．Fig. 6 にその例を示している．確かにこのスケーリング関係式はよく満たされているように見える．問題はこの後の使い方だが，このプロットから関数 f'_χ の具体的な関数形を評価することができる．もしこれがわかると，スケーリング則がわかったことになる．つまり，このスケーリング則を使って，サイズが 2 倍大きいときの帯磁率の値がわかり，反復計算をすれば無限系にたどり着くはずである．

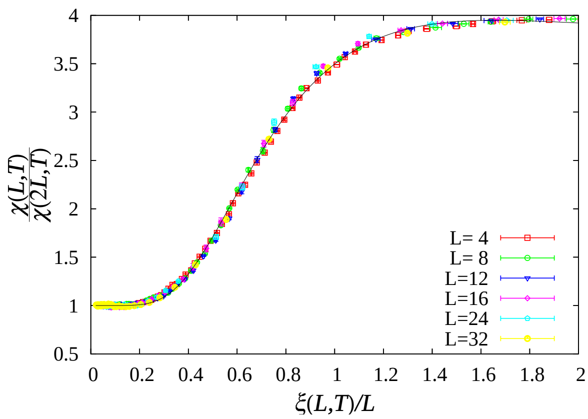


図 6: 2 次元イジング模型の帯磁率の有限サイズスケーリング 3：元データは Fig. 2 である．このプロットでは全てが既知の情報である．実線は $f'_\chi(x) = 1 + a_1 \exp(1/x) + a_2 \exp(2/x) + \cdots$ へのフィッティング曲線である．

この節と前節の 2 つの外挿法によって得られた熱力学極限の帯磁率を Fig. 7 に示した．得られた帯磁率は転移温度の近傍で期待される巾的な特異性を持つことが見て取れる．これまでに見てきた 3 つの有限サイズスケーリングは元は同じ仮説から導かれたわけだが，帯磁率の巾的な特異性の組み込み方が異なっている．最初の方法は既にスケーリング関係式の中に組み込まれていて，転移温度 T_c と臨界指数 γ の推定問

題になっていた．それに対して，残りの 2 つでは最後までその性質は使わずに外挿し，外挿した結果からあらためて転移温度と臨界指数を求める戦略になっている．どの方法がよいかは，ユーザーにとって関心のあるところかもしれないが，筆者にはいまだ判断がついていない．ありきたりの回答としては，スケーリング補正が扱う問題に依存しているので，優位性は問題に依るだろうということである．ただ，3.1 の方法と比較して，3.2, 3.3 の方法が試された例は圧倒的に少ないので，知見も多くないのも事実である．今後に多くの例で試されることによって，得られることもあると期待される．

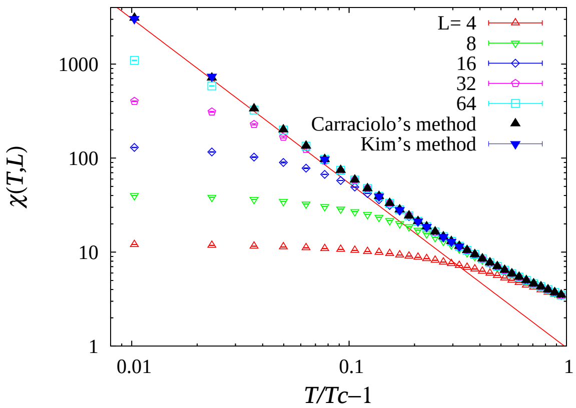


図 7: 2 次元イジング模型の帯磁率の温度依存性：横軸は転移温度からのズレ $t = T/T_c - 1$ とした．有限系での計算結果と同時に，この節の方法 (Carraciolo's method) と前節の方法 (Kim's method) で求めた熱力学極限での帯磁率も示した．直線は期待される熱力学極限での振る舞いである．

4　おわりに

本解説では，物理の分野でのスケーリング理論について，そのほんの一部を概観した．その共通する基本的な考え方は，スケールを変えたときに物事はどのようにみえるかということであった．この特徴を顕著に使った例である統計力学の有限サイズスケーリング理論について詳しく解説した．統計力学ではサイズ L が無限大の熱力学極限で初めて見える相転移現象があるが，有限サイズスケーリング理論は有限系の限られた情報から無限系の様子を探る一般的な形式を与えている．ここでは，有限サイズスケーリングを用いて，二次元イジング模型の有限サイズの帯磁率のデータを元に，無限系への外挿をし，また転移温度や臨界指数を評価した．もちろん，他の物理量，例えば磁化密度の分布関数 $P(M)$ 自身等についても同様に解析することができる．

この解析がうまくいった背景を考えてみると，相関長の存在が重要だと思われる．有限系のサイズを大きくして，無限系をめざしたときに，どの程度大きくすれば無限系と思えるかの目安を知る必要がある．物理の問題ではそれが相関長であることが多い．相転移の問題では相関長は転移温度においてのみ無限大に発散していて，それ以外ではある有限の値をもっている．有限サイズスケーリング仮説では，サイズ L と相関長 ξ の比で現象が決まっているという強い条件を課している．物理以外の問題で相関長のような長さのスケールが存在するどうかは全く自明ではないし，存在したとしてもそれがどのような量で特徴付けられるかはわからないことが多いだろう．しかし，この有限サイズスケーリング理論からのメッセージは，無限大への外挿に何か法則があるのならば，スケーリング則のような法則とそれを特徴づける長さのスケールを認識することが大事であるということである．例えば，平均場模型のように空間的な構造やスケールが定義出来ないような状況でも，確かに熱力学極限に対するスケーリング則は存在し，そのときには相関の強いクラスター体積のような量が相関長に変わりうることが議論されている [11]．そうしたスケール変数の正体を知ることが，問題や現象の本質を知るきっかけになると信じている．物理以外の分野でも，スケーリング理論によって無限大の世界に継って，新たな知見が得られる問題があればそれは楽しそうである．

参考文献

[1] E.Abrahams, P.W. Anderson, D.C.Licciardello and T.V.Ramakrishnan: Scaling Theory of Localization: Absence of Quantum Diffusion in Two Dimensions, Phys. Rev. Lett. **42** (1979) 673.

[2] M. E. Fisher and M. N. Barber: Scaling Theory for Finite-Size Effects in the Critical Region, Phys. Rev. Lett. **28**, 1516 (1972)

[3] M.N.Barber, in *Phase transitions and Critical Phenomena* edited by C.Domb and J.L.Lebowitz, Vol. **8**, Academic Press, 1983.

[4] P. G. de Gennes: *Scaling Concepts in Polymer Physics*, Cornell Univ. Press, 1979.

[5] ランダウ＝リフシッツ：「力学」，東京図書.

[6] I.A.Campbell, K.Hukushima and H. Takayama: Extended scaling scheme for critically divergent quantities in ferromagnets and spin glasses, Phys. Rev. Lett., **97** 117202 (2006).

[7] S. Caracciolo, R. G. Edwards, S. J. Ferreira, A. Pelissetto, and A. D. Sokal: Extrapolating Monte Carlo Simulations to Infinite Volume: Finite-Size Scaling at $\xi/L \gg 1$, Phys. Rev. Lett. **74**, 2969 (1995).

[8] J.-K.Kim: Application of finite size scaling to Monte Carlo simulations, Phys. Rev. Lett. **70**, 1735 (1993)

[9] K. Binder: Finite size scaling analysis of ising model block distribution functions, Z. Phys. **B43**, 119 (1981).

[10] F. Cooper, B. Freedman and D. Preston: Solving ϕ^4_{12} field theory with Monte Carlo, Nuclear Physics B, **210**, 210 (1982).

[11] R.Botet, R.Jullien and P.Pfeuty: Size Scaling for Infinitely Coordinated Systems , Phys.Rev.Lett. **49**, 478 (1982).